UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES
FACULTAD DE INGENIERÍA
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS

LABORATORIO Nº10
Transformaciones Lineales

Ejemplos:

1. Sea $T: lR^3 \mapsto lR^2$, transformación lineal dada por:

$$\begin{aligned} T(2,0,1) &= (-1,2) \\ T(1,1,1) &= (0,0) \\ T(5,-3,2) &= (2,1) \end{aligned}$$

Encuentre una fórmula para $T(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in lR^3$.

Solución:

Primero, estudiaremos la dependencia lineal del conjunto: $\{(2,0,1),\ (1,1,1),\ (5,-3,2)\}$.

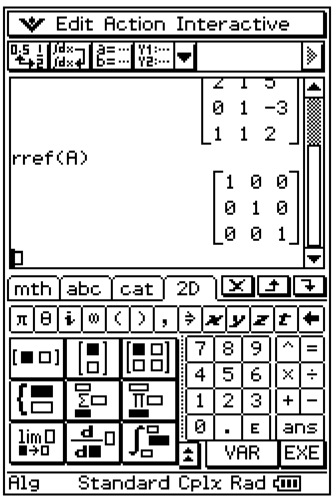
Sean $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in lR$ tales que:

$$\alpha(2,0,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(5,-3,2) = (0,0,0)$$

Luego, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2\alpha & + & \beta & + & 5\gamma & = & 0 \\ & & \beta & - & 3\gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{array}\right|$$

Ingresamos la matriz correspondiente a la calculadora, la llevamos a su forma escalonada reducida:



De donde se deduce que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, lo que implica que el conjunto $\{(2,0,1),\ (1,1,1),\ (5,-3,2)\}$ es linealmente independiente y de que sabemos que la dimensión de lR^3 es 3, entonces es una base para este espacio vectorial.

Luego, para todo $(x, y, z) \in lR^3$ se tiene que existen $a, b, c \in lR$ tales que:

$$a(2,0,1) + b(1,1,1) + c(5,-3,2) = (x, y, z) \qquad (1)$$

Por lo tanto:

$$T(a(2,0,1) + b(1,1,1) + c(5,-3,2)) = T(x, y, z)$$

Y como *T* es transformación lineal, entonces:

$$\begin{aligned} T(a(2,0,1) + b(1,1,1) + c(5,-1,2)) &= aT(2,0,1) + bT(1,1,1) + cT(5,-3,2) \\ &= a(-1,2) + b(0,0) + c(2,1) \\ &= (-a + 2c, 2a + c) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$T(x, y, z) = (-a + 2c, 2a + c)$$

Ahora determinamos *a* y *b* en función de las variables *x*, *y*, *z*:

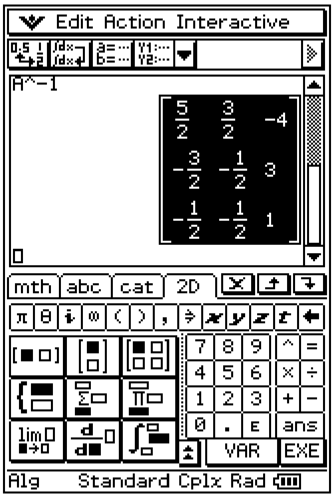
De (1) se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2a & + & b & + & 5c & = & x \\ & & b & - & 3c & = & y \\ a & + & b & + & 2c & = & z \end{array}\right|$$

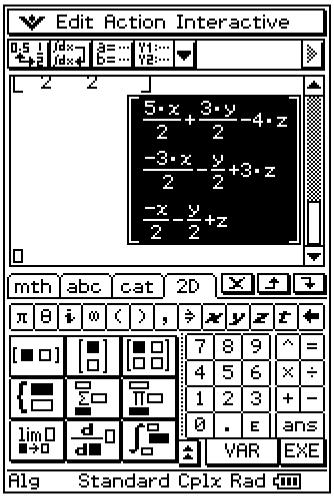
Y si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $\vec{a} = A^{-1}\vec{x}$, donde $\vec{a} = (a, b, c)$ y $\vec{x} = (x, y, z)$.

(Observe que como ya probamos que el conjunto de vectores es linealmente independiente sabemos que A^{-1} existe.)

Utilizamos la calculadora para encontrar la inversa de *A*:



Ahora calculamos el producto $A^{-1}\vec{x}$, obteniéndose:



Por lo tanto:

$$a=\frac{5x}{2}+\frac{3y}{2}-4z\ ,\quad b=\frac{-3x}{2}-\frac{y}{2}+3z\quad \text{y}\quad c=\frac{-x}{2}-\frac{y}{2}+z$$

Finalmente $T(x,y,z)$ está definida por la fórmula:

$$T(x,y,z)=\left(\frac{5x}{2}+\frac{3y}{2}-4z\ ,\ \frac{-3x}{2}-\frac{y}{2}+3z\ ,\ \frac{-x}{2}-\frac{y}{2}+z\right)$$

2. Sea $T: lR^3 \mapsto lR^4$ transformación lineal definida por:

$$T(x,y,z)=(x+y-z,\ 2x+y-z,\ 3x+2y-2z,\ -y+z)$$

a) Encuentre $(x,y,z)\in lR^3$ tal que $T(x,y,z)=(2,-1,1,-5)$.
b) Determine $Ker(T)$. ¿Es T una transformación lineal inyectiva?
c) Determine $\mathrm{Im}(T)$. ¿Cuál es el rango de T?

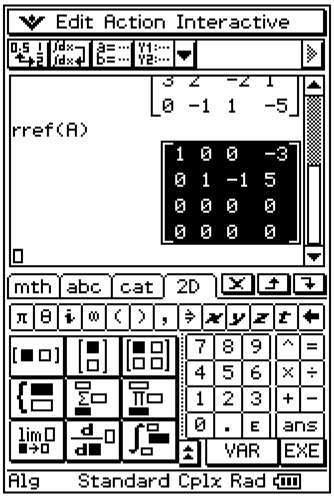
Solución:

a) $T(x,y,z)=(2,-1,1,-5)$ si y sólo si $(x+y-z,\ 2x+y-z,\ 3x+2y-2z,\ -y+z)=(2,-1,1,-5)$

Luego, debemos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & -5 \end{array}$$

Ingresamos la matriz ampliada en la calculadora y la llevamos a lo forma escalonada reducida:



De donde obtenemos:

$x=-3$ y $y-z=5$

Luego, hay infinitas soluciones y están dadas por:

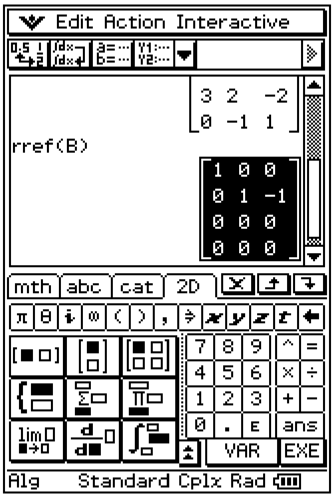
$$\{(x,y,z)\in lR^3\ /\ x=-3 \wedge y=z+5\}=\{(-3,z+5,z)\ /\ z\in lR\}$$

b) $Ker(T)=\{(x,y,z)\in lR^3\ /\ T(x,y,z)=(0,0,0,0)\}$
$=\{(x,y,z)\in lR^{\cdot}\ /\ (x+y-z,\ 2x+y-z,\ 3x+2y-2z,\ -y+z)=(0,0,0,0)\}$

Luego, para determinar $Ker(T)$, resolvemos el sistema homogéneo:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Ingresamos la matriz y la llevamos a su forma escalonada reducida:



Concluimos que si $(x, y, z) \in Ker(T)$, entonces:

$x = 0$ e $y - z = 0$, por lo tanto:

$Ker(T) = \{(x, y, z) \in lR^3 \ / \ x = 0 \ \wedge \ y = z\} = \{(0, z, z) \ / \ z \in lR\} = \langle (0,1,1) \rangle$

Por lo tanto $\dim(Ker(T)) = 1 \neq 0$, luego T **no** es inyectiva.

c) $\mathrm{Im}(T) = \{T(x, y, z) \ / \ (x, y, z) \in lR^3\}$

$= \{(x + y - z, \ 2x + y - z, \ 3x + 2y - 2z, \ -y + z) \ / \ (x, y, z) \in lR^3\}$

$= \{x(1,2,3,0) + y(1,1,2,-1) + z(-1,-1,-2,1) \ / \ x, \ y, \ z \in lR\}$

$= \langle (1,2,3,0), \ (1,1,2,-1), \ (-1,-1,-2,1) \rangle$

Para determinar el rango de *T*, utilizamos la fórmula:

$\dim(lR^3) = \dim(Ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$

De donde se tiene que $r(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

<u>Actividades:</u>

1. Sea $T : lR^3 \mapsto lR^3$ transformación lineal dada por:

$$
\begin{aligned}
T(1,-1,1) &= (1,0,-1) \\
T(-1,-1,1) &= (0,-1,1) \\
T(2,-2,3) &= (-1,1-1)
\end{aligned}
$$

   Encuentre una formula para $T(x, y, z)$.

2. Sea $T : M_{2x2}(lR) \mapsto M_{2x2}(lR)$ definida por:

$$T(X) = AX - XA, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a. Demuestre que T es transformación lineal.
   b. Determine $Ker(T)$. ¿Es *T* inyectiva?
   c. Determine el rango de *T*.

3. Si $T: lR^3 \mapsto lR^4$ es transformación lineal tal que:

$$\mathrm{Im}(T) = \left\langle (1,1,0,1),\ (0,1,1,1),\ (2,1,-1,1) \right\rangle$$

¿Es *T* una transformación inyectiva?